

## บทที่ 3

### ปัญหาความคุ้มและการวิเคราะห์ความไวต่อการเปลี่ยนแปลง (Dual Problem and Sensitivity Analysis)

จากการวิเคราะห์ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นพบว่าจะมีรูปแบบของปัญหาซึ่งมีความสัมพันธ์กับปัญหาเดิม(Primal Problem) เสมอ คือ ปัญหาความคุ้ม(Dual Problem) จากปัญหาความคุ้มนี้เราสามารถหาคำตอบในอีกด้านของปัญหาเดิม โดยอาศัยความสัมพันธ์ของตัวแปรที่ต้องตัดสินใจ เงื่อนไขขอบข่าย และฟังก์ชันวัตถุประสงค์ดังต่อไปนี้

#### ปัญหาเดิม(Primal Problem)

ปัญหาเดิม คือปัญหาปกติที่ต้องการหาคำตอบที่ถูกกำหนดให้ปัญหาเดิมเป็นการหาค่าสูงสุด

$$\text{Max } Z_p = C_1 X_1 + C_2 X_2 + C_3 X_3$$

มีเงื่อนไขขอบข่ายเป็น

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 \leq b_1$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 \leq b_2$$

$$a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 \leq b_3$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

จากสัมประสิทธิ์ของตัวแปรที่ต้องตัดสินใจและฟังก์ชันวัตถุประสงค์ในปัญหาเดิมสร้างเป็นปัญหาความคุ้มได้ดังนี้

#### ปัญหาความคุ้ม (Dual Problem)

$$\text{Min } Z_d = b_1 Y_1 + b_2 Y_2 + b_3 Y_3$$

มีเงื่อนไขขอบข่ายเป็น

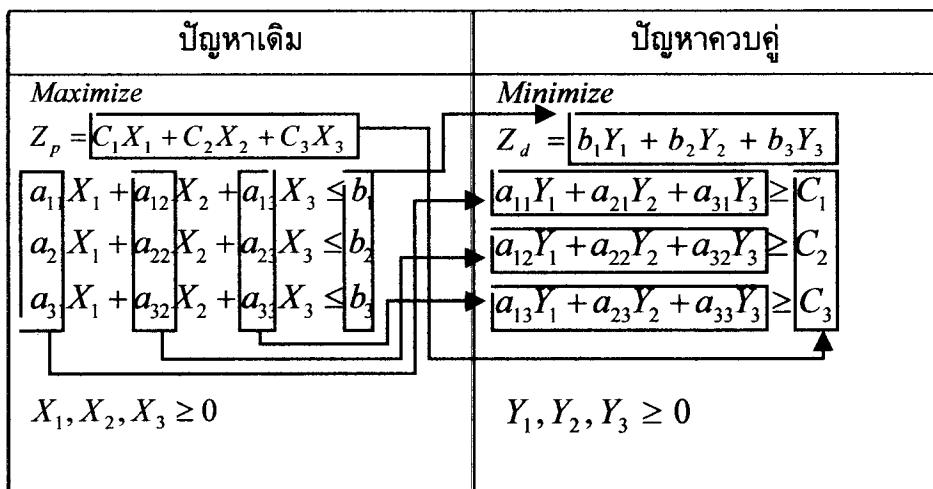
$$a_{11}Y_1 + a_{21}Y_2 + a_{31}Y_3 \geq C_1$$

$$a_{12}Y_1 + a_{22}Y_2 + a_{32}Y_3 \geq C_2$$

$$a_{13}Y_1 + a_{23}Y_2 + a_{33}Y_3 \geq C_3$$

$$Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0$$

เขียนเป็นแผนผังโดยความสัมพันธ์ของปัญหาเดิมและปัญหาควบคู่อยู่ได้ดังนี้



#### หลักเกณฑ์ในการสร้างปัญหาควบคู่จากปัญหาเดิม

1. จำนวนเงื่อนไขจากปัญหาเดิม จะเท่ากับจำนวนตัวแปรที่ต้องตัดสินใจในปัญหาควบคู่
2. จำนวนตัวแปรในปัญหาเดิมจะเท่ากับจำนวนเงื่อนไขของปัญหาควบคู่
3. ถ้าปัญหาเดิมเป็นปัญหาค่าสูงสุด ปัญหาควบคู่จะเป็นปัญหาค่าต่ำสุดหรือในทางกลับกันถ้าปัญหาเดิมเป็นปัญหาค่าต่ำสุด ปัญหาควบคู่จะเป็นปัญหาค่าสูงสุด
4. ค่าทางขวามือของเงื่อนไขตัวที่  $i$  ( $b_1, b_2, b_3 \dots b_n$ ) ของปัญหาเดิมจะเป็นค่าสัมประสิทธิ์ตัวที่  $i$  ในฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของปัญหาควบคู่
5. ค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรที่อยู่แก้วดังในสมการเงื่อนไขของปัญหาเดิมจะเป็นค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรตัวที่อยู่แก้วอนของปัญหาควบคู่
6. ค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรตัวที่  $i$  ( $C_1, C_2, C_3 \dots C_n$ ) ในฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของปัญหาเดิมจะเป็นค่าทางขวามือของปัญหาควบคู่
7. ปัญหาเดิมเป็นการหาค่าสูงสุด จะต้องทำการปรับเครื่องหมายทุกข้อของเงื่อนไขให้เป็น เครื่องหมาย “≤” (น้อยกว่าหรือเท่ากับ)
8. ปัญหาเดิมเป็นปัญหาค่าต่ำสุด จะต้องทำการปรับเครื่องหมายทุกข้อของเงื่อนไขให้ เป็นเครื่องหมาย “≥” (มากกว่าหรือเท่ากับ)

**ตัวอย่าง 3.1** โรงงานผลสมคอนกรีตสำเร็จรูปแห่งหนึ่งมีสูตรในการผลสมคอนกรีต 2 สูตรคือ สูตรที่ 1 และสูตรที่ 2 ซึ่งต้องใช้ส่วนผสมของวัตถุดิบ 3 ชนิดคือ ปูนซีเมนต์ หิน และทรายในปริมาณที่ต่างกันในปริมาณต่อไปนี้

	คงกรีตสูตรที่ 1	คงกรีตสูตรที่ 2	ปริมาณวัตถุดิบที่หาได้สูงสุด
	ลูกบาศก์เมตร/คงกรีต 1 ตัน	ลูกบาศก์เมตร/คงกรีต 1 ตัน	ลูกบาศก์เมตร
ปูนซีเมนต์	4	2	48
หิน	5	7	52
ทราย	3	6	65
กำไรจากการขาย	50	30	

จากปัญหานี้ผู้จัดการฝ่ายผลิตต้องการทราบว่า จะต้องทำการผลิตคงกรีตสูตรที่ 1 และสูตรที่ 2 จำนวนกี่ตันในขณะที่วัตถุดิบมีอย่างจำกัด กำหนดตัวแปรที่ต้องตัดสินใจ

$$X_1 \text{ คือ ปริมาณคงกรีตสูตรที่ 1 (ตัน)}$$

$$X_2 \text{ คือ ปริมาณคงกรีตสูตรที่ 2 (ตัน)}$$

พังก์ชั่นวัตถุประสงค์

$$MaxZ_p = 50X_1 + 30X_2 \quad (\text{พันบาท})$$

เงื่อนไขขอบข่าย

$$4X_1 + 2X_2 \leq 48$$

$$5X_1 + 7X_2 \leq 52$$

$$3X_1 + 6X_2 \leq 65$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

จากปัญหาเดิมสามารถโดยความสัมพันธ์เป็นปัญหาควบคู่ได้ดังต่อไปนี้

ปัญหาควบคู่

กำหนดตัวแปรที่ต้องตัดสินใจ

$Y_1$  คือ ราคาของปูนซีเมนต์ต่อลูกบาศก์เมตร (1,000 บาทต่อลูกบาศก์เมตร)

$Y_2$  คือ ราคาของหินต่อลูกบาศก์เมตร (1,000 บาทต่อลูกบาศก์เมตร)

$Y_3$  คือ ราคาของทรายต่อลูกบาศก์เมตร (1,000 บาทต่อลูกบาศก์เมตร)

การพิจารณาปัญหาความคุ้มจากปัญหาเดิมที่เป็นการหาค่าสูงสุด ปัญหาความคุ้มจะเป็นการพิจารณาค่าต่ำสุด จากตัวอย่างนี้จะเป็นการพิจารณาว่าราคาของวัตถุดินแต่ละชนิดควรเป็นอย่างไร จึงจะได้ต้นทุนการผลิตที่ต่ำที่สุด

$$\text{Min}Z_d = 48Y_1 + 52Y_2 + 65Y_3$$

เงื่อนไขข้อบ่งชี้

$$4Y_1 + 5Y_2 + 3Y_3 \geq 50$$

$$2Y_1 + 7Y_2 + 6Y_3 \geq 30$$

$$Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0$$

จากความสัมพันธ์จะเห็นได้ว่าในปัญหาเดิม (Primal Problem) เราสามารถโดยความสัมพันธ์ เพื่อที่จะหาข้อมูลของปัญหาอีกด้านหนึ่งได้ด้วย จากตัวอย่างเราจะสามารถวิเคราะห์ได้ด้วยว่า ถ้าหากราคาของวัตถุดินในห้องตลาดมีการเปลี่ยนแปลงไปจะมีผลอย่างไรกับราคาขาย และปริมาณที่ควรผลิต

วิธีในการแก้ปัญหา สามารถใช้วิธีกราฟ หรือวิธีซิมเพล็กซ์ ได้ตามความเหมาะสมของปัญหานั้น

#### การวิเคราะห์ความไวต่อการเปลี่ยนแปลง (Sensitivity Analysis)

การวิเคราะห์ความไวต่อการเปลี่ยนแปลงคือการวิเคราะห์ว่าค่าตัวเลขของ ตปส.ในฟังก์ชันวัตถุประสงค์สามารถเปลี่ยนแปลงได้อย่างไร หรือวิเคราะห์ค่าทางขาวมือของเงื่อนไขว่าสามารถเปลี่ยนแปลงได้มากน้อยเพียงใด จึงจะไม่ทำให้คำตอบที่ได้ที่สุดของปัญหาเปลี่ยนแปลง ในส่วนนี้จะแสดงตัวอย่างการวิเคราะห์ความไวต่อการเปลี่ยนแปลงด้วยวิธีกราฟ ซึ่งเป็นวิธีที่ทำให้เข้าใจหลักการได้ง่าย

**การเปลี่ยนแปลงของสัมประสิทธิ์ในฟังก์ชันวัตถุประสงค์**  
จากรูปแบบของฟังก์ชันวัตถุประสงค์

$$\text{Max}Z \text{ or } \text{Min}Z = C_1X_1 + C_2X_2$$

การเปลี่ยนแปลงของสัมประสิทธิ์  $C_1$  และ  $C_2$  จะมีผลทำให้สมการเส้นตรงของฟังก์ชันวัตถุประสงค์เปลี่ยนแปลงไป เช่น ความชัน และจุดตัด ซึ่งถ้าหากไม่มีการควบคุมจะทำให้ค่าของวัตถุประสงค์เปลี่ยนแปลงไป เช่น กำไรสูงสุดหรือต้นทุนต่ำสุด การวิเคราะห์จะทำให้ทราบว่าค่าของสัมประสิทธิ์สามารถเปลี่ยนแปลงได้อย่างไร โดยที่ค่าของตัวแปรที่ต้องตัดสินใจ ยังคงเป็นค่าเดิม และให้ผลของการตัดสินใจเป็นค่าเดิม

**ตัวอย่าง 3.2** บริษัท GOA ผลิตสี 2 ชนิด คือ สีทาภายในและสีทาภายนอก จากวัตถุดิน  $M_1$  และ  $M_2$  ดังตารางต่อไปนี้

ชนิดของวัตถุดิบ	น.น.ของวัตถุดิบต่อ น.น. ของสี(ตัน)		ปริมาณวัตถุดิบ ที่หาได้(ตัน)
	สีทางภายนอก	สีทางภายใน	
วัตถุดิบ M1	6	4	24
วัตถุดิบ M2	1	2	6
ผลกำไรต่อตัน	5 (พันบาท)	4 (พันบาท)	

จากการสำรวจตลาดพบว่าความต้องการสูงสุดต่อวันของสีทางภายในไม่เกิน 2 ตัน และความต้องการของสีทางภายนอกไม่มากเกินกว่า 1 ตัน ของสีทางภายนอก บริษัทต้องการ หาปริมาณการผลิตของสีทางภายนอกและสีทางภายนอก ที่ให้กำไรรวมสูงที่สุด

### วิธีทำ

- กำหนดตัวแปรที่ต้องตัดสินใจ (Decision Variable)

จากโจทย์พบว่าเราต้องการทราบว่าจะต้องผลิตสีแต่ละชนิดเป็นจำนวนเท่าใด ดังนั้น กำหนดให้

$$\begin{array}{ll} X_1 \text{ แทน ปริมาณการผลิตของสีทางภายนอก} & (\text{ตัน}) \\ X_2 \text{ แทน ปริมาณการผลิตของสีทางภายใน} & (\text{ตัน}) \end{array}$$

- ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ (Objective Function)

เป้าหมายที่เราต้องการคือ กำไรสูงที่สุดจากการผลิต ดังนั้นส่วนที่เป็นผลกำไร จะนำมากำหนดเป็นฟังก์ชันวัตถุประสงค์

$$MaxZ = 5X_1 + 4X_2 \quad (\text{พันบาท})$$

เงื่อนไขข้อบ่งชี้

$$6X_1 + 4X_2 \leq 24 \quad (1)$$

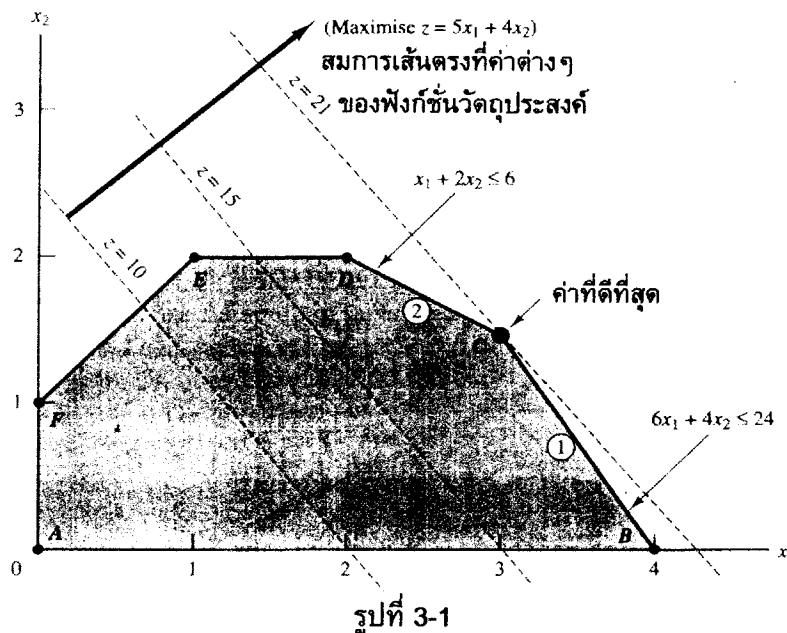
$$X_1 + 2X_2 \leq 6 \quad (2)$$

$$X_2 \leq 2 \quad (3)$$

$$X_2 - X_1 \leq 1 \quad (4)$$

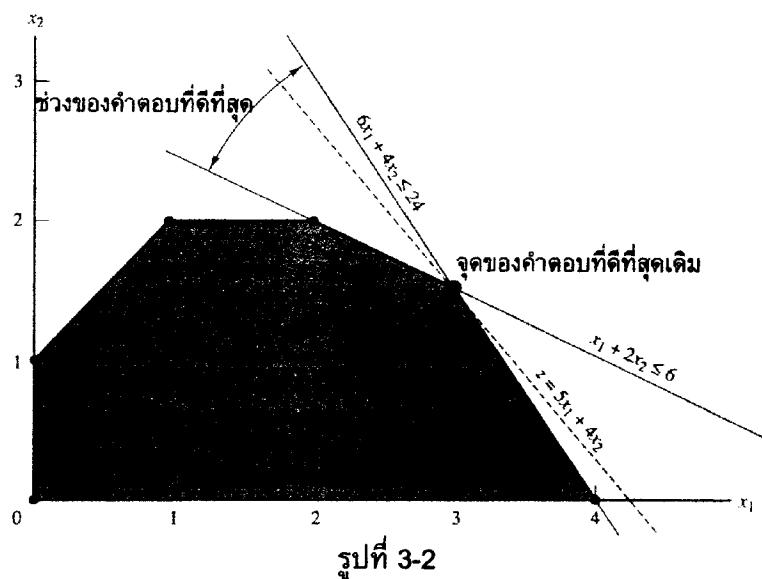
$$X_1, X_2 \geq 0 \quad (5)$$

หาคำตอบที่ดีที่สุดด้วยวิธีกราฟ



จากพังก์ชันวัตถุประสงค์พบว่า จุด C เป็นจุดที่ให้ค่าตอบที่ดีที่สุดคือ  $X_1 = 3$   
และ  $X_2 = 1.5 Z = 21$

วิเคราะห์ความเปลี่ยนแปลงของสัมประสิทธิ์ในพังก์ชันวัตถุประสงค์ก็เพื่อต้องการทราบว่าซึ่งในการเปลี่ยนแปลงของสัมประสิทธิ์มีการเปลี่ยนแปลงได้เพียงใด หรือในความหมายของปัญหาคือ กำไรที่ได้จากการขายนั้นเอง ซึ่งการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นจะไม่ทำให้ค่าตอบหรือจุดที่ดีที่สุด (Optimum) เปลี่ยนแปลงไปจากรูปดังไปนี้จะแสดงให้เห็นซึ่งของการเปลี่ยนแปลงสัมประสิทธิ์ที่เป็นไปได้ที่จะไม่ทำให้ค่าตอบเปลี่ยนแปลงไป



เราจะพบว่าความเปลี่ยนแปลงของสมการเส้นตรงในฟังก์ชันวัตถุประสงค์จะอยู่ระหว่างเส้นตรงที่ (1)  $6X_1 + 4X_2 = 24$  และสมการเส้นตรงที่ (2)  $X_1 + 2X_2 = 6$

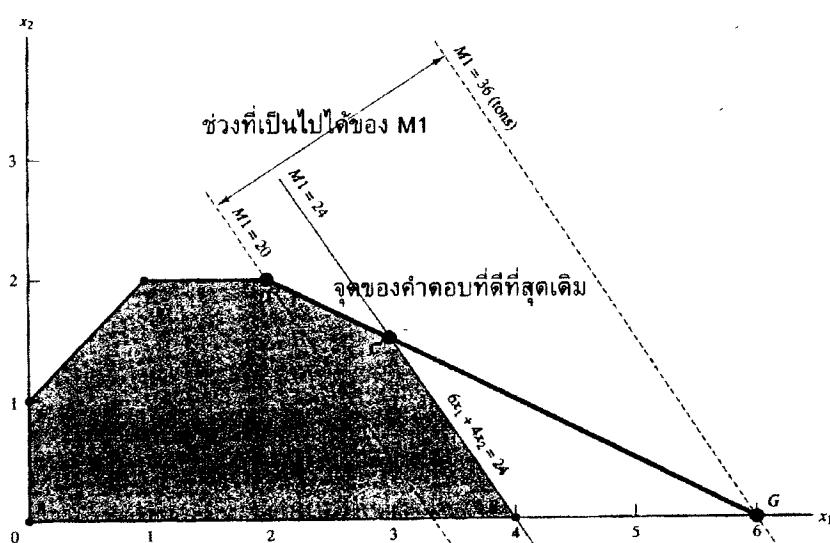
จากฟังก์ชันวัตถุประสงค์  $\text{Max } Z = C_1 X_1 + C_2 X_2$   
สามารถเขียนเป็นความสัมพันธ์ได้ว่า

$$\frac{4}{6} \leq \frac{C_2}{C_1} \leq \frac{2}{1} \quad \text{เมื่อ } C_1 \neq 0 \quad \text{หรือ}$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{C_1}{C_2} \leq \frac{6}{4} \quad \text{เมื่อ } C_2 \neq 0$$

### การเปลี่ยนแปลงของค่าทางข้ามเมื่อในเงื่อนไขขอน้ำด้วย

ในการวิเคราะห์ส่วนนี้ จะทำการวิเคราะห์ว่าทรัพยากรที่มีอยู่นั้นสามารถเปลี่ยนแปลงได้อย่างไรบ้างและการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นจะส่งผลให้ค่าตอบหรือกำไรเปลี่ยนแปลงได้อย่างไร จากตัวอย่างทรัพยากรที่เราจะกล่าวถึงคือ วัตถุดับ  $M_1$  และวัตถุดับ  $M_2$  โดยที่วัตถุดับ  $M_1$  จะขึ้นอยู่กับเส้นตรง  $6X_1 + 4X_2 \leq 24$  และวัตถุดับ  $M_2$  จะขึ้นอยู่กับเส้นตรง  $X_1 + 2X_2 \leq 6$  ดังแสดงในรูปด้านไปนี้



รูปที่ 3-3

จากเส้นตรง  $6X_1 + 4X_2 \leq 24$  มีความสัมพันธ์กับวัตถุดิบ  $M_1$  สังเกตช่วงของการเปลี่ยนแปลงในวัตถุดิบ  $M_1$  ที่สามารถเปลี่ยนแปลงได้ภายในได้บริเวณที่เป็นไปได้ของคำตอบที่ค่าต่ำสุดคือ 20 ตัน และค่าสูงสุดคือ 36 ตันดังรูปที่ 3-3 โดยที่ค่าของคำตอบเดิมวัตถุดิบ  $M_1$  จะอยู่ที่ 24 ตัน หากการวิเคราะห์จะทำให้ทราบว่าค่าของวัตถุดิบ  $M_1$  ที่เปลี่ยนแปลงไปแต่ละ 1 ตัน ไม่ว่าจะเพิ่มขึ้นหรือลดลงจะมีผลอย่างไรต่อคำตอบหรือกำไรจากการผลิต

กำหนดให้  $y_1$  คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของกำไรต่อวัตถุดิบ  $M_1$

$$y_1 = \frac{\text{การเปลี่ยน} Z \text{ จาก } D \text{ ถึง } G}{\text{การเปลี่ยน} M_1 \text{ จาก } D \text{ ถึง } G}$$

เมื่อ  $D=(2,2)$  และ  $G=(6,0)$  ดังนั้น

$$Z \text{ ที่ } D = (5)(2) + (4)(2) = 18 \quad (\text{พันบาท})$$

$$Z \text{ ที่ } G = (5)(6) + (4)(0) = 30 \quad (\text{พันบาท})$$

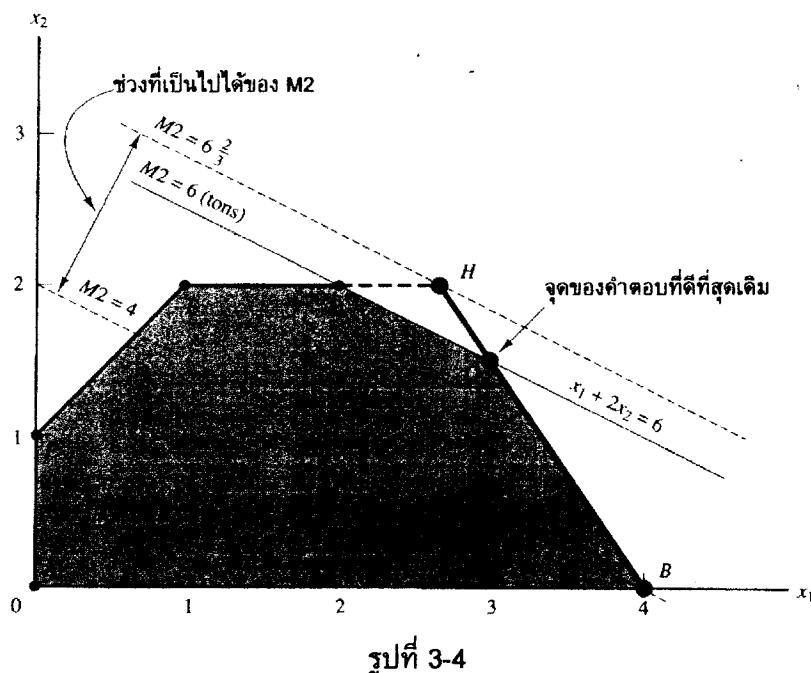
และจาก  $6X_1 + 4X_2 = M_1$  พบรากแกนค่าที่จุด  $D$  และ  $G$  จะได้

$$M_1 \text{ ที่ } D = 20 \quad (\text{ตัน})$$

$$M_1 \text{ ที่ } G = 36 \quad (\text{ตัน})$$

$$y_1 = \frac{30 - 18}{36 - 20} = 0.75 \quad (\text{พันบาทต่อตันของวัตถุดิบ } M_1)$$

สรุปได้ว่าช่วงของการเปลี่ยนแปลงคือ  $20 \leq M_1 \leq 36$  "ไม่ว่าจะเพิ่มขึ้นหรือลดลงจาก 24 ตัน แต่ละ 1 ตันของวัตถุดิบ  $M_1$  จะทำให้กำไรเพิ่มขึ้นหรือลดลงเป็น 0.75 (พันบาทต่อตันของวัตถุดิบ  $M_1$ )



รูปที่ 3-4

จากเส้นตรง  $X_1 + 2X_2 \leq 6$  มีความสัมพันธ์กับวัตถุคิบ  $M_2$  สังเกตช่วงของการเปลี่ยนแปลงในวัตถุคิบ  $M_2$  ที่สามารถเปลี่ยนแปลงได้ภายใต้เงื่อนไขเป็นไปได้ของคำตอบที่ค่าต่ำสุดคือ 4 ตัน และค่าสูงสุดคือ  $\frac{20}{3}$  ตันดังรูปที่ 3-4 โดยที่ค่าของคำตอบเดิมวัตถุคิบ  $M_2$  จะอยู่ที่ 6 ตัน จากการวิเคราะห์จะทำให้ทราบว่าค่าของวัตถุคิบ  $M_2$  ที่เปลี่ยนแปลงไปแต่ละ 1 ตัน ไม่ว่าจะเพิ่มขึ้นหรือลดลงจะมีผลอย่างไรต่อคำตอบหรือทำการผลิต

กำหนดให้  $y_2$  คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของกำไรต่อวัตถุคิบ  $M_2$

$$y_2 = \frac{\text{การเปลี่ยน} Z \text{ จาก} B \text{ ถึง} H}{\text{การเปลี่ยน} M_2 \text{ จาก} B \text{ กอง} H}$$

เมื่อ  $B=(4,0)$  และ  $H=(\frac{8}{3}, 2)$  ดังนั้น

$$Z \text{ ที่ } B = (5)(4) + (4)(0) = 20 \quad (\text{พันบาท})$$

$$Z \text{ ที่ } H = (5)(\frac{8}{3}) + (4)(2) = 21.33 \quad (\text{พันบาท})$$

และจาก  $X_1 + 2X_2 \leq M_2$  พนว่าถ้าแทนค่าที่จุด  $B$  และ  $H$  จะได้

$$M_2 \text{ ที่} \text{ จุด} \text{ } B = 4 \quad (\text{ตัน})$$

$$M_2 \text{ ที่} \text{ จุด} \text{ } H = \frac{20}{3} \quad (\text{ตัน})$$

$$y_2 = \frac{1}{2} \quad (\text{พันบาทต่อตันของวัตถุคิบ} M_2)$$

สรุปได้ว่าช่วงของการเปลี่ยนแปลงคือ  $4 \leq M_2 \leq \frac{20}{3}$  ไม่ว่าจะเพิ่มขึ้นหรือลดลงจาก 6 ตัน แต่ละ 1 ตันของวัตถุดับ  $M_2$  จะทำให้กำไรมีเพิ่มขึ้นหรือลดลงเป็น 0.5 (พันบาทต่อตันของวัตถุดับ  $M_2$ )

ในการณ์ที่ปัญหามีตัวแปรที่ต้องตัดสินใจมากกว่า 2 ตัว หรือมีเงื่อนไขมากข้อ การใช้ วิธีกราฟ เพื่อทำการวิเคราะห์ความเปลี่ยนแปลงจึงทำได้ยาก โดยทั่วไปจะนิยมใช้โปรแกรม บันคอมพิวเตอร์ เพื่อทำการวิเคราะห์ความไวต่อการเปลี่ยนแปลง